

Préquis : Esp. vect., app. lin., $\mathcal{L}(E, F)$.

E K-esp. de dim. finie $n \geq 1$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
 $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E .

I. FORMES LINÉAIRES, HYPERPLANS.

A. Forme linéaire sur E . (M)

Def (M) p.13 On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans K .
 On note $E^* = \mathcal{L}(E, K)$, appelé dual de E .

Exe (M) i. forme coordonnée : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto x_i$
 (+) $(x, y) \mapsto x + y$ forme lin. sur $\mathbb{R}^2$.

Prop (M) E^* est un K-esp. de dimension $n = \dim E$.
 @ donc on peut définir son dual E^{**} ,
 dit bidual de E .

B. Hyperplans

Def (M) On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Exe (M) Les hyperplans de $\vec{P}$ sont des $\vec{D}$,
 ceux de $\vec{E}$ sont des $\vec{P}$.

Prop (M) Soit $\varphi \in E^* - \{0\}$. Alors $\text{Ker } \varphi$ est un hyperplan de E .
 Réciproquement, tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle. (unicité à une mult. scalaire pr.)

(comme $\varphi \neq 0$ et $\varphi|_{\text{Ker } \varphi} = 0$ de l'hyperplan et $\dim \text{Ker } \varphi = n - \dim \text{Im } \varphi = n-1$)

$\varphi \neq 0$ et $\varphi|_{\text{Ker } \varphi} = 0$, donc $\dim \text{Ker } \varphi = n-1$

II. DUALITÉ

A. Base duale. (G) + (M)

Def (M) Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E .
 $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, e_i^* définie sur B par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$
 s'appelle i^e forme coordonnée.

th. (M) $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*
 appelée base duale de B .
 Par tout $\varphi \in E^*$, on a $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) \cdot e_i^*$.

Exe (M) La base duale de $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 est :
 $\begin{cases} \varphi_1(x) = x_1 - x_2 + x_3 \\ \varphi_2(x) = x_1 - x_2 - x_3 \\ \varphi_3(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3 \end{cases}$

th. (M) Soit $x \in E$. On note $\tilde{x} : E^* \rightarrow K$
 $\varphi \mapsto \varphi(x)$
 On a $\tilde{x} \in E^{**}$, et $f : E \rightarrow E^{**}$ est un isomorphisme
 $x \mapsto \tilde{x}$

Prop (M) Base antiduale : Soit $(f_1, \dots, f_n)$ base de E^* .
 $\exists! (e_1, \dots, e_n)$ base de E tq $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $f_i = e_i^*$.
 C'est la base antiduale de $(f_1, \dots, f_n)$.

B. Orthogonalité. (M)

Def (M) $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dits orthogonaux
 si $\varphi(x) = 0$.

• Pour $A \subseteq E$, on note $A^\perp = \{ \varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \varphi(x) = 0 \}$,
 c'est un sur de E^* , dit orthogonal de A .
 • Pour $B \subseteq E^*$, on note $B^\circ = \{ x \in E \mid \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0 \}$,
 c'est un sur de E , dit orthogonal de B .

Exe (M) $\{e_i^*\} = E^*$; $E^\perp = \{0\}$

Prop (M) (i) $A, A^\perp$ s.c. de E , $\dim A + \dim A^\perp = \dim E$;
 $A^{\perp\perp} = A$

$$(A \cap B)^\perp = A^\perp \cup B^\perp$$

$$(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$$

(ii) B_1, B_2 s.c. de E^* , $\dim B_1 + \dim B_2 = \dim E$.
 $B^{\circ\circ} = B$

$$(B_1 \cap B_2)^\circ = B_1^\circ \cap B_2^\circ$$

$$(B_1 \cup B_2)^\circ = B_1^\circ \cup B_2^\circ$$

th (M) Equations d'un sur en dim. finie
 $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$ tq $\text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = r$.

$F = \{ x \in E \mid \forall i, \varphi_i(x) = 0 \}$ est de dim. $n-r$.
 Réciproquement, si F sur de dimension $n-q$,
 $\exists$ q formes lin. $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ tq
 $F = \{ x \in E \mid \forall i \in \{1, \dots, q\}, \varphi_i(x) = 0 \}$.

III. Applications TRANSPOSÉES. (M)

Def : E, F K-esp. dim. finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$
 $\forall \varphi \in F^*$, on a $\varphi \circ u \in E^*$.

L'application linéaire $F^* \rightarrow E^*$
 $\varphi \mapsto \varphi \circ u$
 est appelée application transposée de u et notée ${}^t u$.

Prop (i) $\text{rg}(u) = \text{rg}({}^t u)$
 (ii) $\text{Im}({}^t u) = (\text{Ker } u)^\perp$
 (iii) $\text{Ker}({}^t u) = (\text{Im } u)^\perp$ (aussi en dim.)

Sur le cadre
 ex. Grifone : $\text{Mat}_{B_2^*, B_1^*}({}^t u) = {}^t (\text{Mat}_{B_3, B_2}(u))$

th. de représentation de Riesz : $\varphi \in E^*$ forme lin. cont.,
 $\exists! a \in E$ tq $\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$.
 (Gourdon Analyse - Exo).